

Einführung in die wichtigsten Grundlagen

im Rahmen der Ringvorlesung

Moderne Physik und Schule

am 18. April 2012

Ingolf Hertel

HU ProMINT Kolleg und Max-Born-Institut

Skript aktualisiert: 18. April 2012

Gliederung Teil 1

Wechselwirkungen und Teilchen

Neutronenzerfall

Exponentialverteilungen und Statistik

Exponentialverteilung

Absorption, Lambert-Beer'sches Gesetz

Boltzmann Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

Planck Verteilung

Literatur

Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-
Beer'sches
Gesetz

Boltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

Planck Verteilung

Literatur

Literatur

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen

”Was die Welt im innersten zusammenhält” beschreiben wir in der Physik heute durch vier fundamentale Wechselwirkungen:

- ▶ Gravitation
- ▶ Elektromagnetische Wechselwirkung
- ▶ Elektroschwache Wechselwirkung (kurz: schwache WW)
- ▶ Starke Wechselwirkung

Die drei letzteren WW werden durch das sogenannte Standardmodell einheitlich beschrieben – die Gravitation entzieht sich derzeit noch einer Vereinheitlichung (GUT)

Subatomare Welt

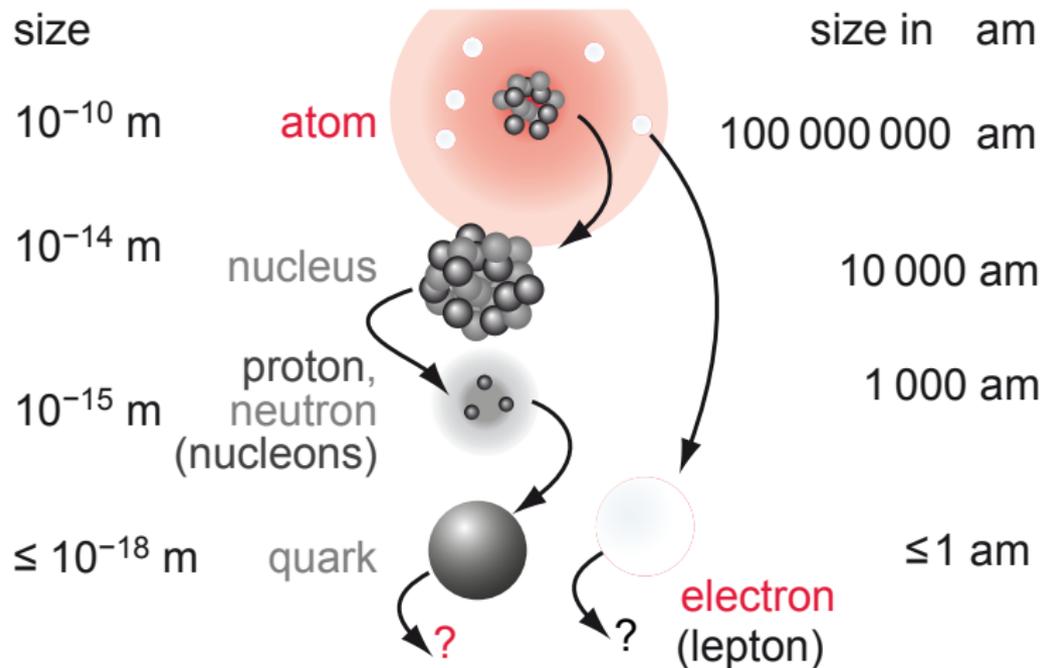


Abbildung : Subatomare Größenordnungen

The three generations of matter particles (fermions)

Gauge or exchange particles (bosons)

MPSch-SS2012

Mass¹⁾
Charge
Spin
Name

Quarks: each may have one of the colours red green blue

Neutrinos colourless

Leptons

2.4 MeV 2/3 1/2 u Up	1.27 GeV 2/3 1/2 c Charm	171.2 GeV 2/3 1/2 t Top
---	---	--

4.8 MeV -1/3 1/2 d Down	104 MeV -1/3 1/2 s Strange	4.2 GeV -1/3 1/2 b Bottom
--	---	--

< 2.2 eV 0 1/2 ν_e El. neutrino	<0.17 MeV 0 1/2 ν_μ Myon neutr.	<15.5 MeV 0 1/2 ν_τ Tau neutr.
---	---	---

0.511MeV -1 1/2 e Electron	105.7MeV -1 1/2 μ Myon	1.777 GeV -1 1/2 τ Tauon
---	--	---

0 0 1 γ Photon

electro-magnetic interaction

0 0 1 g Gluon ²⁾
--

strong interaction

91.2 GeV 0 1 Z^0 Z-Boson
--

electroweak interaction

80.4 GeV ± 1 1 W^\pm W-Boson
--

electroweak interaction

Higgs-Boson³⁾

1) $1\text{MeV}/c^2 = 1.073 \times 10^{-3} u = 1.957 \text{ a.u. } (m_e)$

2) each 1 colour + 1 anti colour (8 combinations)

3) not yet observed experimentally (November 2010)

Ingolf Hertel

Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-Beer'sches
Gesetz

Boltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

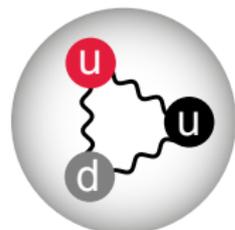
Planck Verteilung

Literatur

Literatur

Abbildung : Die Elementarteilchen

Proton

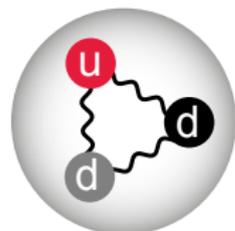


Charge = $1e_0$
Spin = $1/2$
stable

Mass

$$\begin{aligned}m_p &= 1836.15 m_e \\ &= 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ &= 938.27231 \text{ MeV}/c^2 \\ &= 1.007\,276\,47 \text{ u}\end{aligned}$$

Neutron



Charge = 0
Spin = $1/2$
unstable
 $\Delta t_{1/2} = 10 \text{ min } 14 \text{ s}$

$$\begin{aligned}m_n &= 1838.68 m_e \\ &= 1.6749 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ &= 939.5656 \text{ MeV}/c^2 \\ &= 1.008\,664\,92 \text{ u}\end{aligned}$$

Abbildung : Proton und Neutron: Zusammensetzung aus Quarks

Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-
Beer'sches
GesetzBoltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

Planck Verteilung

Literatur

Literatur

Die Elementarteilchen

- ▶ Baut sich aus den Elementarteilchen auf: 6 Quarks, 6 Antiquarks (starke WW), 6 Leptonen, 6 Antileptonen – diese alle sind Fermionen (Spin $\frac{1}{2}\hbar$) ... sowie die Wechselwirkungsbosonen (Spin $0, 1, 2\hbar$)
- ▶ Quark-Confinement – Farbladung (Hadronen sind insgesamt weiß)
- ▶ 3 Quarks mit unterschiedlicher Farbe bilden die Baryonen (mehr als 200, extrem kurzlebig – bis auf Neutron und Proton = Nukleonen)
- ▶ 1 Quark und 1 Antiquark bilden Mesonen ...
- ▶ Baryonen und Mesonen zusammen: Hadronen (starke WW, insgesamt weiß)
- ▶ Leptonen (farblos, schwache WW, auch mit Quarks), echte Elementarteilchen
- ▶ Das Standardmodell erklärt befriedigend den ganzen Teilchenzoo
- ▶ Nach Higgs Boson wird noch gesucht ... LHC ... noch dieses Jahr?

Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-
Beer'sches
GesetzBoltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

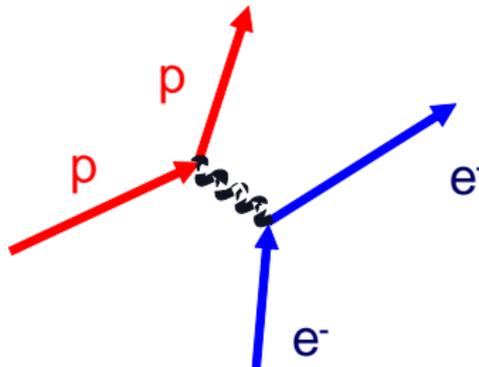
Planck Verteilung

Literatur

Literatur

Feynman Graphen

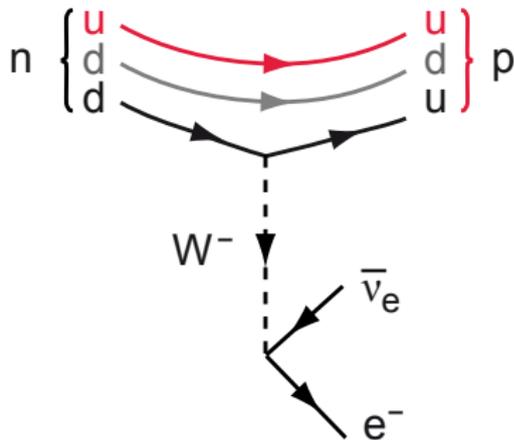
- ▶ Feynman Graphen waren ursprünglich ein Hilfsmittel für die Buchhaltung der Quantenelektrodynamik (QED)
- ▶ Symbolische Teilchenbewegung und Austausch des Wechselwirkungsteilchens γ
- ▶ z.B. charakterisiert man die Wechselwirkung des Protons mit einem Elektron (s. Wasserstoffatom)



- ▶ Feynman Graphen werden ganz analog auch in der Quantenchromodynamik (QCD) benutzt

Neutronenzerfall

Das Neutron ist nur im Atomkern sind Neutronen stabil, sonst zerfällt es mit einer Halbwertszeit von $\tau_{1/2} = 10.2 \text{ min}$



Sog. β^- Strahlung.

- ▶ Stabilität
- ▶ Isoliertes Proton ist aber beliebig stabil!
- ▶ Es gibt aber β^+ Zerfälle von Atomkernen mit zu viel Protonen



Exponentialverteilungen und Statistik

- ▶ Sind Begriffe wie „instabile“ Teilchen, Zustände, β -Zerfall, Halbwertszeit, Spontaner Zerfall, mittlere Lebensdauer u.ä. bekannt?
- ▶ QM macht nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über Aufenthaltsort und zeitliche Entwicklung von Quantenobjekten
- ▶ Wenn Teilchen oder Zustand nicht stabil, so zerfällt er mit einer gewissen Zerfallswahrscheinlichkeit A mit $[A] = 1/s$
- ▶ unabhängig von Anzahl der Teilchen, unabhängig von der Zeit (statistisch)
- ▶ keine Aussage über Einzelschicksal, aber über große Zahl \mathcal{N} Teilchen: in der Zeit dt zerfallen:

$$d\mathcal{N} = -\mathcal{N}A dt$$

▶

$$\int \frac{d\mathcal{N}}{\mathcal{N}} = - \int_0^t A dt$$

$$\int \frac{d\mathcal{N}}{\mathcal{N}} = - \int_0^t A dt$$



$$\Rightarrow \ln \mathcal{N}(t) - \ln \mathcal{N}_0 = -At$$



$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_0 e^{-At}$$



$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_0 e^{-t/\tau} = \mathcal{N}_0 e^{-t \ln 2 / \tau_{1/2}}$$

Mit $\tau = 1/A$ bzw. der sog. **Halbwertszeit**

$$\tau_{1/2} = \ln 2 / A = \tau \ln 2 = 0.692 \tau$$

$$w(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \int_0^{\infty} w(t) dt = 1$$

Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-
Beer'sches
GesetzBoltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

Planck Verteilung

Literatur

Literatur

- ▶ Normierte Schreibweise für Einzelteilchen

$$w(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \int_0^{\infty} w(t) dt = 1 ,$$

Wahrscheinlichkeit, bei t noch nicht zerfallen zu sein (bzw. $w(t) dt$ für einen Zerfall zur Zeit t).

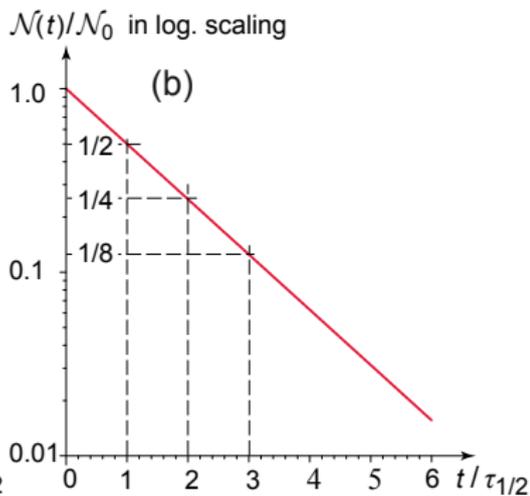
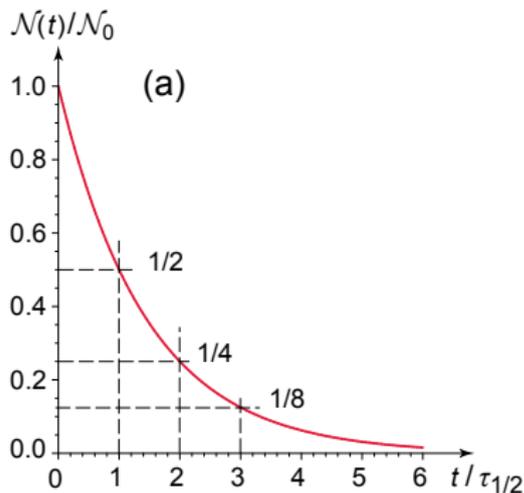
- ▶ $w(t)$ ist die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** für Zerfallszeiten.
- ▶ Allgemein $\langle f \rangle = \int_0^{\infty} f(x) w(x) dx .$
- ▶ Speziell die mittlere Lebensdauer

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t w(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} t e^{-t/\tau} dt = \tau$$

mittlere Lebensdauer ist: $\langle t \rangle = \tau$

Exponentieller Zerfall

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_0 e^{-At}$$



Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-
Beer'sches
GesetzBoltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

Planck Verteilung

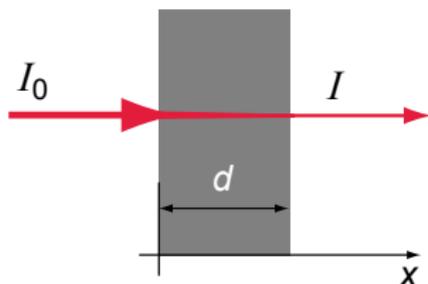
Literatur

Literatur

Absorption, Lambert-Beer'sches Gesetz

- ▶ Exponentialverteilungen spielen auch sonst eine wichtige Rolle (nicht nur für die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte (Zerfalls-)Zeit zu beobachten.)
- ▶ Wichtiges Beispiel: Absorption von Teilchen oder von elektromagnetischer Strahlung, zu der auch das sichtbare Licht oder die γ -Strahlung gehören.
- ▶ Hier prototypisch die Absorption von Licht, charakterisiert durch seine Wellenlänge λ und seine Intensität I (die Energie, die pro Zeiteinheit und Flächeneinheit mit dem Licht transportiert wird:
 $[I] = \text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} = \text{W m}^{-2}$)
- ▶ Wir behandeln die Absorption von Licht beim Durchgang durch Materie (gefärbtes Glas, absorbierende Atome oder Moleküle in Gasform, Farbstofflösung etc.).

Lambert-Beer'sches Gesetz



Bei moderater Intensität ist die Absorption proportional zur Dicke d x . Die Proportionalitätskonstante μ (Einheit $[\mu] = \text{m}^{-1}$) heißt **Absorptionskoeffizient**.

$$dI = -\mu I dx = -N\sigma I dx$$

$$\Rightarrow \int_{I_0}^{I(d)} \frac{dI}{I} = - \int_0^d \mu dx \Rightarrow \ln \frac{I(d)}{I_0} = -\mu d,$$

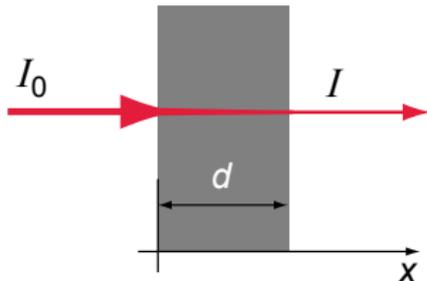
\Rightarrow **Lambert Beer'sche Gesetz** (wieder Exponentialgesetz):

$$I(d) = I_0 \exp(-\mu d) = I_0 \exp(-\sigma N d).$$

$$w(x) = \frac{1}{l} e^{-x/l} \quad \text{mit} \quad l = 1 / (\sigma N)$$

l : **mittlere freie Weglänge** des Photons im Medium.

Lambert-Beer'sches Gesetz



$$I(d) = I_0 \exp(-\sigma Nd)$$

- ▶ Denken wir uns das absorbierende Medium unendlich ausgedehnt, dann können wir die Verteilung wieder als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung interpretieren:

$$w(x) = \frac{1}{l} e^{-x/l}$$

- ▶ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon bis zu Ort x noch nicht absorbiert wurde. Und $w(x) dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zwischen x und $x + dx$ absorbiert wird.

- ▶ Von großer Bedeutung für die gesamte Physik ist die sogenannte **Boltzmann-Verteilung** – das ist auch **eine Exponentialverteilung!**

$$\frac{N_i}{N} = \frac{g_i}{\mathcal{Z}(T)} \exp(-u_i/k_B T)$$

- ▶ Zustandssumme $\mathcal{Z}(T) = \sum_i g_i \exp(-u_i/k_B T)$, $g_i =$ Entartung, $T =$ Temperatur, $u =$ Energie, $k_B =$ Boltzmann Konstante
- ▶ Bei kontinuierlichen Energien

$$dN \propto g(u) \exp(-u/k_B T) du$$

- ▶ wobei jetzt $g(u)$ die Zustandsdichte (pro Volumen) ist.

Maxwell-Boltzmann Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right] dv_x dv_y dv_z,$$

- ▶ normiert auf Integral 1. Wahrsch. für v bis $v + dv$:
Integr. über alle Raumwinkel $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$.



$$\frac{dN}{N} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T} \right] dv$$

- ▶ Normiert: Integral über $0 \leq v < \infty$ gleich 1. Und:
 $v_{\max} = \sqrt{2k_B T/m}$. Und mit $u = mv^2/2$:

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{u} \exp \left(-\frac{u}{k_B T} \right) du \quad (1)$$

- ▶ $\Rightarrow g(u) \propto \sqrt{u}$. Mittlere Energie ist:

$$\langle u \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty u \sqrt{u} \exp \left(-\frac{u}{k_B T} \right) du = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\text{B} \quad dN = \frac{1}{\exp [(u - \mu) / (k_B T)]} \times g(u) du$$

$$\text{F-D} \quad dN = \frac{1}{\exp [(u - \mu) / (k_B T)] + 1} \times g(u) du$$

$$\text{B-E} \quad dN = \frac{1}{\exp [(u - \mu) / (k_B T)] - 1} \times g(u) du$$

Eingeführt *chemisches Potenzial* μ (zur Normierung).

Dimension dieser Gleichungen m^{-3}

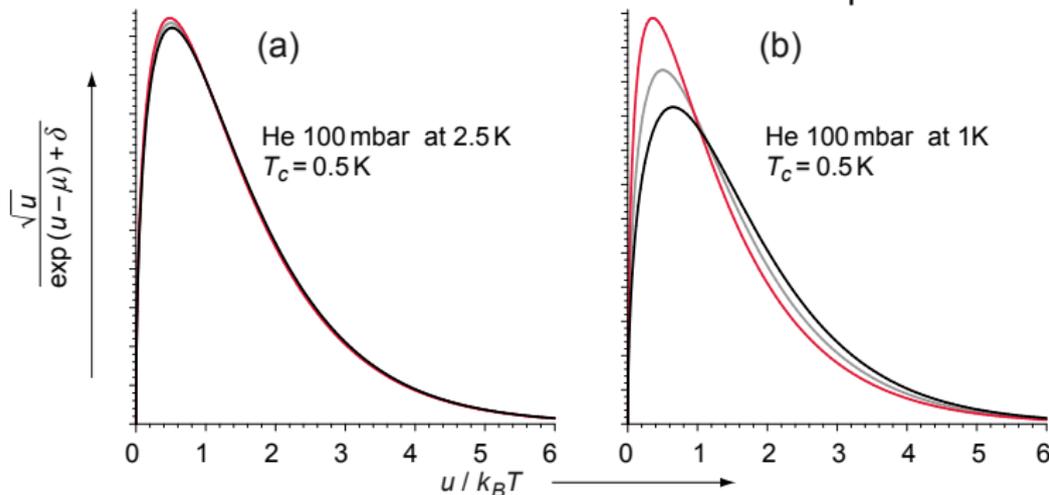
Fermi-Dirac: Fermionen

Bose-Einstein: Bosonen; $\mu < 0$ für massebehaftete

Teilchen; $\mu = 0$ für Photonen

Vergleich bei tiefen Temperaturen

in der Nähe der kritischen BE Kondensationstemperatur



Grau klassische Maxwell-Boltzmann Verteilung, schwarz Fermi-Dirac Statistik, Rot Bose-Einstein,

künftiges, neues SI

http://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_draft_ch2.pdf

- ▶ The kelvin, K, is the unit of thermodynamic temperature; its magnitude is set by fixing the numerical value of the **Boltzmann constant to be equal to exactly**

$$k_B = 1.3806X \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \text{ - (derzeit noch } 1.3806488(13) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \text{)}$$

- ▶ The mole, mol, is the unit of amount of substance of a specified elementary entity, which may be an atom, molecule, ion, electron, any other particle or a specified group of such particles; its magnitude is set by fixing the numerical value of the **Avogadro constant to be equal to exactly**

$$N_A = 6.02214X \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{ - (derzeit noch } 6.02214129(27) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{)}$$

http://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_draft_ch2.pdf

- ▶ The ampere, A, is the unit of electric current; its magnitude is set by fixing the numerical value of the **elementary charge to be equal to exactly**
 $e_0 = 1.60217X \times 10^{-19} \text{ s A}$ – (derzeit noch $1.602176565(35) \times 10^{-19} \text{ A}$).
- ▶ The kilogram, kg, is the unit of mass; its magnitude is set by fixing the numerical value of the **Planck constant to be equal to exactly**
 $h = 6.62606X \times 10^{-34} \text{ J s}$ – (derzeit noch $6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J s}$).

Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-
Beer'sches
GesetzBoltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

Planck Verteilung

Literatur

Literatur

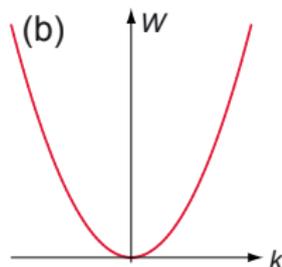
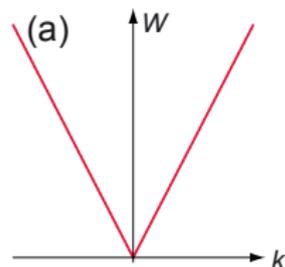
Für *masslose Teilchen* in vacuo, mit $c = v\lambda = \omega/k$:

$$W = \hbar\omega = \hbar c |\vec{k}|$$

lineare Beziehung zwischen Energie und Wellenvektor.

Gegenstück: frei bewegtes, nichtrelativistisches electron

$$W = W_P + \frac{m_e}{2} v^2 = W_P + \frac{p^2}{2m_e} = W_P + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_e}$$



Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-
Beer'sches
GesetzBoltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

Planck Verteilung

Literatur

Literatur

Planck'sche Verteilung

- ▶ Bose-Einstein Statistik für „Photonengas“ (masselos)
- ▶ Gesucht: Energiedichte pro Frequenzintervall
- ▶ Es gilt: $\mu = 0$, $u = h\nu \propto k$ (das ist sehr wichtig)
- ▶ $g(u) \propto k^2 \propto \nu^2 \propto u^2$



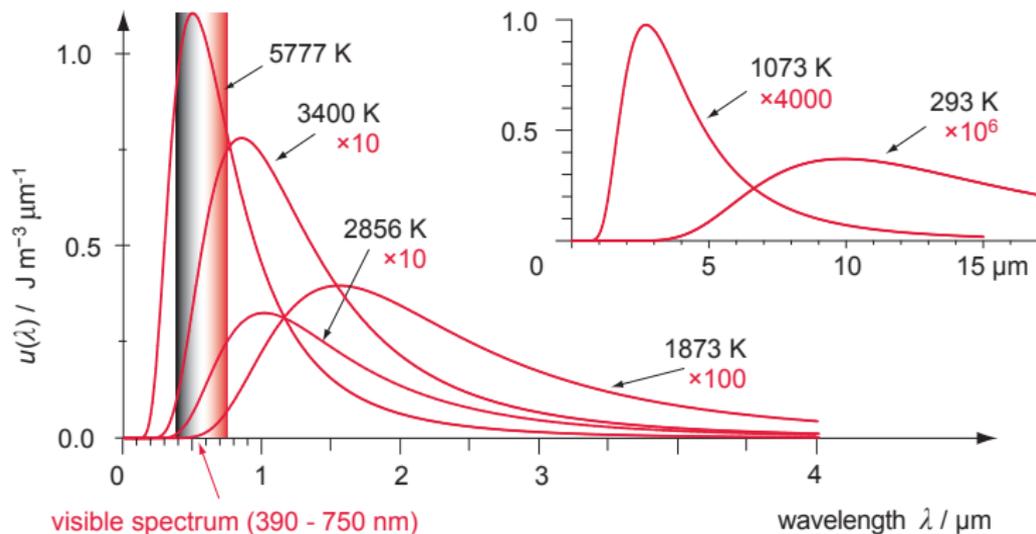
$$\tilde{u}(\nu) d\nu \propto u \times g(u) \frac{du}{\exp\left(\frac{u - \mu}{k_B T}\right) - 1}$$



$$\tilde{u}(\nu) d\nu \propto \nu^3 \frac{d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

- ▶ Beachte: bei massebehafteten Teilchen wäre auch $u = h\nu$, aber $g(u) \propto k^2 \propto u$

Planck'sche Verteilung



Teilchenzoo

Neutronenzerfall

Statistik

Exponentialverteilung

Absorption,
Lambert-
Beer'sches
GesetzBoltzmann
Statistik

Drei Statistiken

Neues SI

Dispersion

Planck Verteilung

Literatur

Literatur

Hertel, I. V. & Schulz, C. P. (2008). *Atome, moleküle und optische physik 1; atomphysik und grundlagen der spektroskopie* (1. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. (<http://staff.mbi-berlin.de/AMO/Buch-homepage/index.html>)

Hertel, I. V. & Schulz, C. P. (2010). *Atome, moleküle und optische physik 2; moleküle und photonen - spektroskopie und streuphysik* (1. Aufl., Bd. 2). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. (<http://staff.mbi-berlin.de/AMO/Buch-homepage/index.html>)